Ficha de Matemática A

Ficha N.º 1 | Números Complexos | Ensino Secundário | 2026/2027

12.º Ano de Escolaridade

Duração da ficha: 90 minutos. 5 Páginas

A ficha inclui 13 itens. As respostas a todos os itens contribuem para a classificação final.

As respostas aos itens da ficha são registadas na folha de respostas.

A ficha inclui um formulário.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da ficha.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Assinale, na folha de respostas, a opção selecionada.

Nas respostas aos itens de construção, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base × Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base × Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Considere os números complexos $z_1 = (3k + 2) + (p - 1)i$ e $z_2 = (p + 4) + (5 - 4k)i$, em que k e p designam números reais.

Para que valores de k e de p se tem $z_1 = \overline{z_2}$?

(A) $k = 2$ e $p = -4$ **(B)** $k = 2$ e $p = 4$

(C) $k = -2$ e $p = 4$ **(D)** $k = -2$ e $p = -4$

2. Para um certo número real k, considere os números complexos $z_1 = 6 + 3i$ e $z_2 = 2 + ki$.

Sabe-se que o produto de z_1 pelo conjugado de z_2 é um número imaginário puro.

Qual é o valor de k?

(A) -4 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** 4

3. Sejam $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 3 + i$ e $z_3 = 1 - i$ três números complexos e seja $w = \frac{z_1 \times z_2}{z_3}$.

Calcule o módulo de w, sem utilizar a calculadora.

4. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, i é a unidade imaginária.

Sem utilizar a calculadora, escreva na forma algébrica o número complexo $\frac{(2+i)(3-2i)+i^{15}-i^{22}}{1+2i}$.

5. Seja a um número real e considere, em $\mathbb{C}$, os números $z = 2 + i$ e $w = ai^{2030} + 3i^7$.

O afixo do número complexo $z \times \overline{w}$ está situado sobre a bissetriz dos quadrantes pares.

Qual é o valor de a?

(A) -3 **(B)** -1 **(C)** 1 **(D)** 3

6. Resolva, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a equação

$$(2z - i)^2 - 2(2z - i) = -10$$

Apresente as soluções na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

7. Seja $w = \frac{1 - \sqrt{3}i}{e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}$.

Sabe-se que w é uma raiz de índice 4 de um certo número complexo z.

Sem utilizar a calculadora, escreva z na forma algébrica.

8. Sem utilizar a calculadora, escreva na forma algébrica o número complexo

$$z = \left(\frac{4e^{i\left(\frac{\pi}{9}\right)}}{(1+2i)^2 + i^{12} - 4i} \right)^3$$

9. Em $\mathbb{C}$, considere os números $z_1 = -\sqrt{3} + i$ e $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.

Para que menor valor de $n \in \mathbb{N}$ o número complexo $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ é um imaginário puro?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 6

10. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Seja $w = \frac{16 + 16\sqrt{3}i}{2e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}$.

Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 = w$ e apresente as soluções na forma algébrica.

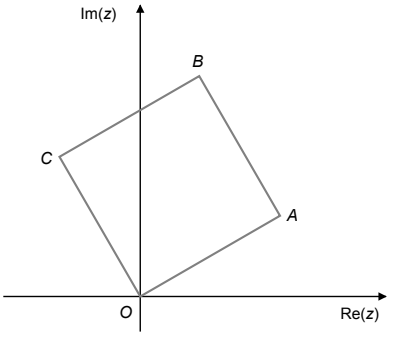
11. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número $w = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$.

Determine as raízes cúbicas de w, apresentando-as na forma trigonométrica.

No plano complexo, os afixos dessas raízes são os vértices de um triângulo. Determine a área desse triângulo.

12. Na figura, está representado, no plano complexo, o quadrado $[OABC]$.



Relativamente a este quadrado, sabe-se que:

- o vértice O coincide com a origem do referencial;
- o vértice A está situado no primeiro quadrante;
- a reta OA tem declive $\frac{\sqrt{3}}{3}$;
- a área do quadrado é 50.

Qual dos números complexos seguintes tem por afixo o vértice B?

(A) $5\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ **(B)** $10e^{i\frac{5\pi}{12}}$ **(C)** $10e^{i\frac{2\pi}{3}}$ **(D)** $5\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

13. Em $\mathbb{C}$, considere os números $z_1 = -2 + i$ e $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

No plano complexo, sejam A e B os afixos de z_1 e de z_2, respetivamente.

Defina, por meio de uma condição em $\mathbb{C}$, a circunferência que tem centro no ponto A e que contém o ponto B.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**11.**	**12.**	**13.**	**Total**
10	10	18	20	10	18	20	18	10	20	18	10	18	200